

RECURSOS EDUCATIVOS ABIERTOS · EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DIDAXIS LAB

Matemática que se manipula

Fundamentación teórica, didáctica y técnica de un laboratorio abierto de matemáticas interactivas para el aula colombiana

Héctor Enrique Banquez Buendía

Docente de matemáticas · Investigador en Educación Matemática
Líder de Plataforma Educativa · Colegio Biffi, Cartagena de Indias
ORCID: [0009-0007-6705-0407](https://orcid.org/0009-0007-6705-0407)

www.didaxislab.com

Versión 1.0 · Agosto de 2026 · Cartagena de Indias, Colombia

Créditos y ficha del documento

Título: Didaxis Lab. Matemática que se manipula. Fundamentación teórica, didáctica y técnica de un laboratorio abierto de matemáticas interactivas para el aula colombiana.

Autor: Héctor Enrique Banquez Buendía. ORCID 0009-0007-6705-0407.

Naturaleza del documento: documento de fundamentación del proyecto. Reúne el marco conceptual, la arquitectura técnica, el catálogo comentado, el modelo de uso en el aula y la agenda de investigación de la plataforma Didaxis Lab. Sirve simultáneamente como memoria del proyecto, como carta de presentación institucional y como base para publicaciones derivadas.

Destinatarios: docentes de matemáticas de básica y media, coordinadores académicos y de calidad, líderes de plataformas educativas, formadores de docentes, investigadores en educación matemática, secretarías de educación y organizaciones que evalúan o financian recursos educativos abiertos.

Estado del catálogo descrito: seis laboratorios interactivos publicados y tres juegos matemáticos en publicación. Las cifras y descripciones corresponden al corte de agosto de 2026.

Licencia: Creative Commons Atribución 4.0 Internacional (CC BY 4.0). Se permite copiar, redistribuir, adaptar y usar comercialmente el contenido, siempre que se otorgue el crédito correspondiente.

Cómo citar este documento

Banquez Buendía, H. E. (2026). Didaxis Lab. Matemática que se manipula: fundamentación teórica, didáctica y técnica de un laboratorio abierto de matemáticas interactivas para el aula colombiana (v. 1.0). Didaxis Lab. <https://www.didaxislab.com>

Advertencia de uso

Este documento describe un proyecto vivo. El catálogo crece, los recursos se versionan y la guía docente de cada laboratorio se actualiza de manera independiente. Ante cualquier discrepancia entre lo aquí escrito y lo publicado en el sitio, prevalece el sitio.

Contenido

(En Word: clic derecho sobre la tabla → Actualizar campos → Actualizar toda la tabla.)

Presentación

Hay una escena que se repite en las aulas de matemáticas de Colombia y de buena parte de América Latina. El docente escribe en el tablero la fórmula del teorema de Pitágoras. Los estudiantes la copian. Alguien pregunta si eso entra en el examen. La fórmula queda escrita, memorizada, aplicada durante dos semanas y olvidada. Nadie ha visto nunca por qué es verdadera. Nadie ha tenido en las manos los cuadrados cuyas áreas se suman.

Didaxis Lab nace de la convicción de que esa escena no es inevitable, y de que la tecnología —bien entendida— puede cambiarla sin exigir laboratorios costosos, licencias anuales ni conectividad permanente. La apuesta del proyecto es sencilla de enunciar y exigente de cumplir: si el estudiante puede arrastrar, medir, deformar y contar por sí mismo, la propiedad matemática deja de ser un enunciado que se cree y pasa a ser un fenómeno que se constata. De ahí el lema del sitio: matemática que se manipula.

Este documento reúne, por primera vez en un solo cuerpo, la fundamentación completa del proyecto. No es un manual de usuario ni un catálogo comercial. Es la explicitación de las decisiones que hay detrás de cada laboratorio: por qué se elige un fenómeno y no otro, por qué la retroalimentación se redacta de una forma determinada, por qué el archivo pesa lo que pesa, por qué no hay registro de usuario, por qué la guía docente tiene la estructura que tiene y por qué el proyecto insiste, contra la corriente dominante, en que todo debe funcionar sin conexión a internet.

El documento está organizado en cuatro partes. La primera sitúa el proyecto: qué es, de dónde viene, sobre qué teoría se apoya y cómo se articula con la normativa curricular colombiana, en particular con los Derechos Básicos de Aprendizaje. La segunda desmonta la arquitectura: el principio de archivo único offline, la anatomía interna de un laboratorio, el diseño de la interactividad, de los retos y de la guía docente. La tercera recorre el catálogo actual, laboratorio por laboratorio y juego por juego. La cuarta discute el impacto: los beneficios concretos para la población escolar colombiana, los modelos de uso en el aula, los retos y limitaciones que el proyecto reconoce, y la agenda de investigación que lo acompaña.

Una advertencia de honestidad intelectual: nada de lo que aquí se afirma sobre los efectos de aprendizaje de Didaxis Lab está todavía respaldado por evidencia empírica propia. Lo que sí está respaldado es el diseño: cada decisión se apoya en literatura consolidada de educación matemática y de diseño instruccional, y se explicita para que pueda ser discutida, replicada o refutada. El capítulo 11 detalla la agenda de validación pendiente. Un proyecto que se presenta como riguroso debe empezar por decir con precisión qué es lo que aún no ha demostrado.

Didaxis Lab es un proyecto de autor, sostenido con recursos propios y ofrecido gratuitamente bajo licencia abierta. Esa condición marca sus límites —no hay equipo, no hay presupuesto, no hay soporte institucional— y también su libertad: no responde a un modelo de negocio, no captura datos, no exige cuentas y no tiene incentivo alguno para retener al estudiante más tiempo del que la tarea matemática requiere.

Héctor Enrique Banquez Buendía

Cartagena de Indias, agosto de 2026

PARTE I

El proyecto

1. Qué es Didaxis Lab

1.1 Definición

Didaxis Lab es una plataforma de recursos educativos abiertos de matemáticas, compuesta por laboratorios interactivos y juegos matemáticos que funcionan directamente en el navegador, sin registro, sin costo y sin conexión permanente a internet. Cada recurso es una pieza de software autocontenida, construida para que el estudiante manipule un objeto matemático y descubra, por exploración dirigida, la propiedad que estructura ese objeto.

El nombre condensa la intención. «Didaxis» remite a la enseñanza como acción intencionada —no a la mera exposición de contenido— y «Lab» al laboratorio como lugar donde se experimenta, se mide y se contrasta una conjetura. La matemática escolar rara vez se enseña en régimen de laboratorio; el proyecto sostiene que puede hacerse, y que hacerlo cambia la relación del estudiante con la disciplina.

1.2 Origen y motivación

El proyecto surge de la práctica docente y de la administración de plataformas educativas. Al intentar incorporar recursos digitales de matemáticas al aula, aparecen de forma sistemática los mismos obstáculos: recursos que exigen crear cuenta, recursos que caducan cuando expira una licencia, recursos que se caen cuando el colegio pierde conectividad, recursos que no pueden incrustarse en el aula virtual institucional por restricciones de seguridad, recursos en inglés, recursos alineados a currículos ajenos, y recursos espectaculares en lo visual pero vacíos en lo didáctico: la animación sustituye al razonamiento en lugar de provocarlo.

A esos obstáculos se suma uno más silencioso y más importante: la mayoría de los objetos interactivos disponibles muestran la matemática en lugar de someterla a prueba. El estudiante observa una animación del teorema de Pitágoras, asiente y sigue. No ha hecho nada. No ha tenido ocasión de equivocarse, ni de conjeturar, ni de justificar. La interactividad se reduce a pulsar «siguiente».

Didaxis Lab se construye como respuesta simultánea a los dos problemas: un obstáculo técnico-económico de acceso y un obstáculo didáctico de profundidad. La respuesta al primero es la arquitectura de archivo único offline; la respuesta al segundo es el diseño del fenómeno manipulable y del reto argumentativo.

1.3 Principios rectores

Diez principios gobiernan cada decisión de diseño. Funcionan como criterios de aceptación: un recurso que incumple uno de ellos no se publica.

- 1. Manipulación antes que exposición.** El estudiante debe poder alterar el objeto matemático y observar la consecuencia. Si el recurso solo se mira, no es un laboratorio.
- 2. El fenómeno antes que la fórmula.** La expresión simbólica aparece como cierre de una exploración, nunca como punto de partida.
- 3. Funcionamiento sin conexión.** Un recurso que depende de la red excluye a quien no la tiene. La conectividad es una comodidad, no un requisito.

4. **Sin registro y sin captura de datos.** Ningún estudiante debe entregar información personal para aprender matemáticas.
5. **Alineación curricular explícita.** Cada recurso declara los Derechos Básicos de Aprendizaje, los estándares y las competencias evaluadas que aborda.
6. **Retroalimentación diagnóstica, no calificadora.** El error debe recibir una explicación de su origen conceptual, no una marca roja.
7. **El docente al centro.** Ningún recurso pretende reemplazar la mediación docente. Todos incluyen una guía que la potencia.
8. **Apertura verificable.** Licencia CC BY 4.0, autoría identificada con ORCID, código legible y descargable.
9. **Sobriedad técnica.** El recurso más ligero que cumple la función didáctica es el mejor recurso. Ninguna animación se incluye por decoración.
10. **Argumentación como horizonte.** La meta última no es que el estudiante obtenga el resultado correcto, sino que pueda sostener por qué lo es.

1.4 Qué no es Didaxis Lab

Delimitar el proyecto por negación evita malentendidos frecuentes y expectativas mal calibradas.

- **No es un sistema de gestión del aprendizaje.** No matricula, no califica, no reporta al acudiente ni almacena progreso en servidor. Convive con el LMS institucional; no compite con él.
- **No es un curso ni una secuencia cerrada.** Los laboratorios son piezas que el docente inserta donde su planeación lo requiera.
- **No es un banco de ejercicios.** Los retos existen para consolidar una exploración previa, no para acumular repeticiones.
- **No es un producto comercial.** No hay versión premium, ni publicidad, ni límite de uso, ni recolección de correos.
- **No es un sustituto del docente ni del cuaderno.** El registro escrito, la discusión colectiva y la institucionalización del saber siguen ocurriendo fuera de la pantalla.
- **No es un tutor de inteligencia artificial.** La respuesta correcta no se entrega: se construye. El capítulo 2 explica por qué esta decisión es deliberada.

1.5 Estado actual del proyecto

Al corte de agosto de 2026, Didaxis Lab publica seis laboratorios interactivos, cuatro de ellos en versión 2.0, y suma tres juegos matemáticos. Cada laboratorio incluye el simulador, un bloque de preguntas tipo Saber 11 con retroalimentación y una guía docente descargable en PDF. Todo el sitio está indexado y es accesible sin registro. El conjunto cubre los cinco pensamientos matemáticos del currículo colombiano y un rango de grados que va de tercero a undécimo.

Componente	Estado a agosto de 2026
Laboratorios interactivos publicados	6 (4 en versión 2.0)
Juegos matemáticos	3 en publicación

Componente	Estado a agosto de 2026
Guías docentes en PDF	1 por laboratorio, descargable
Bancos de preguntas tipo Saber 11	1 por laboratorio, con retroalimentación por opción
Pensamientos matemáticos cubiertos	Numérico, métrico-espacial, variacional, aleatorio y trigonométrico
Rango de grados	3.º a 11.º
Idioma	Español (variante colombiana)
Licencia	CC BY 4.0
Costo para la institución o el estudiante	Ninguno
Requisito de conexión durante el uso	Ninguno una vez cargado el recurso

Tabla 1. Estado del catálogo de Didaxis Lab, corte de agosto de 2026.

2. Fundamentación didáctica

Este capítulo expone el andamiaje teórico del proyecto. No se trata de un ornamento académico: cada uno de los marcos que siguen tiene una consecuencia operativa verificable en el código de los laboratorios. Se indica en cada caso cuál es esa consecuencia.

2.1 De la fórmula al fenómeno

La enseñanza tradicional de las matemáticas presenta el resultado ya elaborado y pide al estudiante que lo aplique. El estudiante, en consecuencia, aprende a reconocer el patrón superficial del ejercicio y a ejecutar el procedimiento asociado, sin haber accedido nunca a la razón por la cual el procedimiento funciona. Esto produce un conocimiento que Skemp caracterizó como comprensión instrumental —saber qué hacer— por oposición a la comprensión relacional —saber qué hacer y por qué—.

La comprensión instrumental es frágil de una forma predecible: sobrevive mientras el problema conserve la forma del ejemplo, y colapsa ante la variación. Es también la forma de conocimiento que la evaluación estandarizada detecta con mayor claridad, porque las preguntas de las pruebas Saber, y en particular las de competencia argumentativa, están diseñadas precisamente para distinguir a quien reconoce el patrón de quien comprende la estructura.

Didaxis Lab invierte el orden. Cada laboratorio empieza por un fenómeno manipulable y termina, cuando corresponde, en la formalización. En Área vs Perímetro, el estudiante deforma un rectángulo manteniendo fijo el perímetro y observa que el área cambia; la disociación entre las dos magnitudes se constata antes de enunciarse. En Pitágoras Interactivo, la equivalencia entre las áreas de los cuadrados se ve y se mide antes de escribirse como igualdad algebraica.

Consecuencia operativa

Ningún laboratorio muestra la fórmula en la pantalla inicial. La expresión simbólica aparece únicamente después de que el estudiante ha manipulado el objeto, y siempre acompañada de la magnitud que representa.

2.2 Registros de representación semiótica

Duval sostiene que un objeto matemático no es accesible directamente: solo se accede a él a través de representaciones —verbal, gráfica, tabular, algebraica, figural—. La comprensión de un objeto no consiste en dominar un registro, sino en poder convertir entre registros y en reconocer que representaciones distintas designan el mismo objeto. La dificultad característica del estudiante no está dentro de un registro sino en el tránsito entre ellos: sabe leer una gráfica y sabe operar una expresión, pero no reconoce que la gráfica y la expresión son la misma cosa.

Esta tesis tiene una traducción de diseño inmediata y potente. El medio digital permite algo que el papel no permite: mostrar varios registros simultáneamente y sincronizarlos, de modo que la modificación de uno se refleje en tiempo real en los demás. La conversión entre registros deja de ser un ejercicio que el estudiante debe realizar mentalmente y pasa a ser un fenómeno que puede observar.

Fracciones Vivas es el caso más nítido: una misma fracción se representa simultáneamente como región circular, como barra, como conjunto discreto y como punto sobre la recta numérica, y las cuatro

se actualizan a la vez. El estudiante no recibe la afirmación «son la misma fracción»; la ve. En Función Cuadrática, el registro algebraico —los parámetros a , b y c —, el registro gráfico —la parábola— y el registro numérico —vértice, raíces, eje de simetría— están ligados: mover el deslizador de un parámetro reorganiza los tres.

Consecuencia operativa

Todo laboratorio que admita más de un registro los muestra en pantalla de forma simultánea y sincronizada, con la misma codificación cromática para el mismo objeto en los distintos registros.

2.3 Mediación semiótica e instrumentalización

Desde Vygotsky, el instrumento no es un accesorio del pensamiento sino un mediador que lo reorganiza. La teoría de la génesis instrumental de Rabardel, retomada en educación matemática por Trouche, Artigue y Drijvers, precisa el punto: un artefacto no se convierte en instrumento por el hecho de estar disponible. Se convierte en instrumento mediante un proceso —la génesis instrumental— en el que el sujeto desarrolla esquemas de uso y, simultáneamente, el artefacto configura la manera en que el sujeto concibe el objeto matemático.

De aquí se sigue una advertencia que el proyecto toma en serio: la mera presencia de un simulador no produce aprendizaje. Sin orquestación docente, el estudiante desarrolla esquemas de uso lúdicos —mover deslizadores para ver colores— desconectados del objetivo matemático. Drijvers y colaboradores documentan que el factor determinante del efecto de una herramienta digital no es la herramienta sino la orquestación instrumental que el docente despliega alrededor de ella.

Por eso la guía docente no es un anexo cortés sino un componente estructural del recurso, y por eso cada guía contiene explícitamente las preguntas que el docente debe formular durante y después de la manipulación. El artefacto sin el guion de orquestación es media herramienta.

Consecuencia operativa

Ningún laboratorio se publica sin su guía docente. La guía incluye la secuencia de preguntas de orquestación y las decisiones de institucionalización que el docente debe tomar al cierre.

2.4 Carga cognitiva y diseño de la interfaz

La teoría de la carga cognitiva de Sweller distingue tres fuentes de demanda sobre la memoria de trabajo: la intrínseca al contenido, la pertinente —la que construye esquemas— y la ajena, generada por el diseño del material. En recursos digitales educativos, la carga ajena es un problema endémico: interfaces recargadas, decoración animada, textos redundantes con la imagen, elementos que compiten por la atención.

El efecto de atención dividida y el efecto de redundancia describen exactamente lo que ocurre cuando un simulador coloca la explicación en un panel lateral alejado de la figura que explica, o cuando repite en texto lo que la animación ya muestra. La memoria de trabajo del estudiante se consume integrando la interfaz en lugar de comprendiendo la matemática.

Didaxis Lab aplica en consecuencia una política de sobriedad visual deliberada: paleta reducida, tipografía única, sin animaciones decorativas, sin sonido ambiental, etiquetas integradas junto al

objeto que nombran y no en un panel remoto, y un solo foco de atención por pantalla. La estética del proyecto no es minimalista por moda sino por economía cognitiva.

Consecuencia operativa

Regla de un solo foco: cada pantalla tiene un objeto manipulable principal. Los controles secundarios se ocultan tras un panel plegable. Ninguna animación existe si no representa un cambio matemático.

2.5 Descubrimiento guiado, no descubrimiento libre

Kirschner, Sweller y Clark argumentaron con evidencia sólida que la instrucción de mínima guía es ineficaz para aprendices novatos: sin andamiaje, el estudiante explora al azar, confirma sus preconcepciones y consume su memoria de trabajo en la búsqueda. La crítica es correcta y el proyecto la acepta. Pero la conclusión no es abandonar la exploración, sino estructurarla.

Cada laboratorio se organiza según una secuencia de tres momentos que retoma la lógica del ciclo predecir–observar–explicar: primero se plantea una pregunta que obliga a comprometerse con una anticipación; luego se manipula el objeto y se observa lo que ocurre; finalmente se contrasta la anticipación con lo observado y se explica la diferencia. El compromiso previo es esencial: sin él, el estudiante racionaliza cualquier resultado como si lo hubiera esperado.

La estructura restringe el espacio de exploración a los grados de libertad que son didácticamente relevantes. En Área vs Perímetro, por ejemplo, el estudiante no puede modificar cualquier cosa: puede deformar el rectángulo, y el laboratorio calcula y muestra las dos magnitudes en juego. La restricción es lo que hace visible el fenómeno.

Consecuencia operativa

Los laboratorios exponen únicamente los parámetros que producen variación conceptualmente significativa. Toda función de exploración que no discrimine entre concepciones se elimina.

2.6 Evaluación formativa y retroalimentación

La síntesis de Black y Wiliam estableció que la evaluación formativa se encuentra entre las intervenciones de mayor efecto sobre el aprendizaje, y que ese efecto depende críticamente de la naturaleza de la retroalimentación. La retroalimentación que se limita a informar si la respuesta es correcta produce efectos marginales; la que informa sobre el proceso y sobre la naturaleza del error produce efectos sustantivos. Hattie y Timperley organizan esta distinción en niveles: retroalimentación sobre la tarea, sobre el proceso, sobre la autorregulación y sobre la persona —esta última, la menos útil y a menudo contraproducente—.

En Didaxis Lab, cada distractor de cada pregunta está construido a partir de un error conceptual documentado, y la retroalimentación asociada nombra ese error. No dice «incorrecto, intenta de nuevo». Dice qué concepción produjo esa respuesta y por qué esa concepción falla. La respuesta correcta también recibe retroalimentación, porque acertar por la razón equivocada es un resultado frecuente y silencioso.

Esta arquitectura convierte cada bloque de preguntas en un instrumento de diagnóstico para el docente: la distribución de las respuestas erradas de un grupo informa sobre qué concepción errónea predomina, y por tanto sobre qué debe abordarse en la siguiente sesión.

Consecuencia operativa

Cada distractor corresponde a un error conceptual identificado, no a una alternativa arbitraria. Cada opción —incluida la correcta— tiene retroalimentación redactada individualmente. La guía docente lista los errores frecuentes con su interpretación diagnóstica.

2.7 La argumentación matemática como horizonte

Este es el eje que da unidad al proyecto y el que lo conecta con la línea de investigación doctoral de su autor. La competencia argumentativa es una de las tres que evalúa el ICFES en la prueba de Matemáticas de Saber 11, y es sistemáticamente la de menor desempeño. La razón es estructural: el aula de matemáticas dedica la mayor parte del tiempo a la ejecución de procedimientos y muy poco a la justificación de por qué esos procedimientos son válidos.

El modelo de Toulmin ofrece una anatomía operativa del argumento que resulta especialmente productiva en el aula de matemáticas. Un argumento consta de datos —los hechos de los que se parte—, una conclusión —lo que se afirma—, una garantía —la regla que autoriza el paso de los datos a la conclusión— y, cuando la garantía se cuestiona, un respaldo que la sostiene; a lo que se añaden los calificadores modales y las condiciones de refutación.

La utilidad del modelo para el diseño de recursos está en la garantía. En el discurso escolar habitual, la garantía se omite: el estudiante enuncia el dato y salta a la conclusión, y el docente acepta el salto porque conoce la garantía implícita. El aprendizaje de la argumentación matemática consiste, en buena medida, en aprender a explicitar garantías. Un recurso digital puede provocar esa explicitación si diseña preguntas que no admiten respuesta sin ella.

Yackel y Cobb añaden la dimensión que falta: qué cuenta como una justificación aceptable no es una propiedad lógica absoluta sino una norma sociomatemática negociada en el aula. Un mismo argumento puede ser suficiente en séptimo e insuficiente en undécimo. Esta norma no está en el software: la establece el docente. De ahí que las guías docentes incluyan criterios explícitos de aceptabilidad por grado.

Didaxis Lab traduce esto en tres mecanismos concretos:

- 1. Preguntas de garantía.** En cada bloque de retos hay al menos una pregunta cuya formulación es «¿por qué?» o «¿qué permite afirmar que...?», y cuyos distractores son conclusiones correctas sostenidas por garantías inválidas. Acertar exige distinguir la razón, no el resultado.
- 2. Contraejemplos manipulables.** Varios laboratorios permiten al estudiante construir el contraejemplo que refuta una generalización apresurada. Refutar con un objeto que uno mismo construyó es una experiencia argumentativa de primer orden.
- 3. Prompts de justificación en la guía docente.** Cada guía incluye preguntas de institucionalización para la puesta en común, formuladas con el vocabulario de la orquestación argumentativa: preguntar, refutar, validar, institucionalizar.

Una decisión de diseño discutida

En los juegos con presión de tiempo se decidió no exigir justificación escrita dentro de la partida. Escribir un argumento mientras el reloj corre genera frustración y empuja al estudiante a responder por descarte. La argumentación se traslada al momento posterior a la partida, sobre la traza exportada de decisiones. La restricción del formato se respeta en lugar de forzarla.

2.8 Vigilancia epistémica en la era de la inteligencia artificial

Un estudiante de 2026 puede obtener la respuesta a casi cualquier ejercicio de matemáticas escolares en segundos, con un procedimiento verosímil y una redacción impecable. Este hecho reconfigura la pregunta didáctica de fondo: el valor escolar ya no está en producir la respuesta sino en evaluar si una respuesta es correcta y por qué. La capacidad de someter a examen una solución ajena —incluida la de un sistema automático— se vuelve una competencia matemática de primer orden.

El proyecto denomina vigilancia epistémica matemática a esa disposición: verificar antes de aceptar, exigir garantía antes de conceder conclusión, y saber qué evidencia haría falta para refutar una afirmación. Los laboratorios contribuyen a ella de manera indirecta pero sustantiva: quien ha construido un contraejemplo con sus manos ha experimentado que una afirmación plausible puede ser falsa, y esa experiencia es la base de la desconfianza productiva.

Existe además un riesgo específico del medio digital que el proyecto debe vigilar en sí mismo: la ilusión de comprensión inducida por la fluidez visual. Un simulador bien hecho puede producir la sensación de haber entendido sin que se haya producido la reorganización conceptual. La sensación de fluidez no es indicador de aprendizaje. Los retos y la puesta en común existen, entre otras razones, para desmentirla cuando corresponde.

Consecuencia operativa

El bloque de retos incluye al menos un ítem que no puede resolverse por reconocimiento visual y exige volver al objeto manipulable o realizar una inferencia adicional. Es el control interno contra la ilusión de comprensión.

2.9 Juego serio y motivación

Los tres juegos del catálogo se rigen por un criterio adicional: la mecánica del juego debe ser el contenido matemático, no un envoltorio del contenido. La distinción es la que separa un juego serio de una actividad gamificada. En una actividad gamificada, el estudiante resuelve un ejercicio y recibe puntos; los puntos son extrínsecos y el ejercicio podría reemplazarse por cualquier otro. En un juego serio, el estudiante no puede avanzar sin razonar matemáticamente, porque el razonamiento es la acción de juego.

En Guardianes del Cero, la mecánica de neutralización de valores es la ley de los signos: no hay una capa de juego y una capa de matemática, hay una sola. En Guardianes del Claro, el estudiante evalúa una función para anticipar la magnitud de la amenaza de la noche siguiente; equivocarse en la evaluación tiene consecuencia dentro del juego. La consecuencia es lo que convierte el cálculo en decisión.

Esta orientación se apoya en la distinción de Deci y Ryan entre motivación extrínseca e intrínseca: los sistemas de recompensa externa pueden erosionar el interés por la tarea cuando la recompensa se vuelve el objetivo. Los juegos del proyecto no otorgan recompensas desconectadas del desempeño matemático, y no incorporan mecánicas de retención —rachas diarias, energía que se agota, presión social— cuya función es maximizar tiempo de uso y no aprendizaje.

3. Alineación con el currículo colombiano

La pertinencia de un recurso educativo en Colombia se juega en su articulación con una arquitectura normativa de cinco niveles. Didaxis Lab declara explícitamente esa articulación en cada laboratorio, porque un recurso que el docente no puede justificar ante su coordinación académica es un recurso que no entra al aula.

3.1 La arquitectura normativa

Nivel	Instrumento	Qué aporta al diseño del recurso
Constitucional	Constitución Política de 1991, arts. 67, 27 y 71	Derecho a la educación, libertad de enseñanza y acceso a la cultura y a la ciencia. Fundamenta la gratuidad y la licencia abierta.
Legal	Ley 115 de 1994 (General de Educación); Ley 1341 de 2009 y 1978 de 2019 (TIC); Ley 1581 de 2012 (datos personales); Ley 1098 de 2006 (infancia y adolescencia)	Fines de la educación y áreas obligatorias; marco de apropiación de TIC; obligación de protección de datos de menores, que fundamenta la ausencia de registro.
Reglamentario	Decreto 1075 de 2015	Reglamento único del sector. Encuadra el uso de estos recursos como actividad curricular ordinaria.
Política pública	Plan Nacional Decenal de Educación 2016-2026; CONPES de transformación e inteligencia artificial	Cierre de brechas, uso pedagógico de las tecnologías, formación docente.
Técnico-curricular	Lineamientos Curriculares (MEN, 1998); Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006); Derechos Básicos de Aprendizaje v2 (MEN, 2016); Matrices de referencia y marcos de Saber 11 (ICFES)	Define qué se enseña, en qué grado y qué se evalúa. Es el nivel que determina el contenido de cada laboratorio.

Tabla 2. Niveles normativos que enmarcan el diseño de los recursos.

3.2 Los Derechos Básicos de Aprendizaje como columna vertebral

Los Derechos Básicos de Aprendizaje, en su segunda versión de 2016, enuncian para cada grado los aprendizajes estructurantes que todo estudiante debe alcanzar, acompañados de evidencias y ejemplos. Son, para el propósito de este proyecto, el instrumento más útil de los cinco niveles: están redactados en términos de lo que el estudiante debe ser capaz de hacer, especifican el grado, e incluyen ejemplos que sugieren tareas concretas.

La decisión de diseño consiste en no partir del tema sino del DBA. Un laboratorio no se construye porque el teorema de Pitágoras sea un contenido tradicional, sino porque existe un derecho de aprendizaje formulado en términos de reconocer y usar relaciones entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, y porque la manipulación digital ofrece una vía privilegiada para ese reconocimiento. Cuando un DBA no admite un tratamiento manipulable que aporte algo por encima del papel, no se construye laboratorio.

Es especialmente relevante que varios DBA del área están redactados con verbos argumentativos —describir y argumentar relaciones, justificar, explicar por qué—, lo que confirma que la argumentación no es un añadido del proyecto sino una exigencia curricular vigente y con frecuencia desatendida en la práctica.

Laboratorio	Pensamiento	Grados	Aprendizaje estructurante que aborda (DBA v2, MEN 2016)
Fracciones Vivas	Numérico	3. ^º –7. ^º	Interpretar la fracción como relación parte-todo, como cociente y como punto de la recta numérica; reconocer equivalencias y comparar fracciones.
Área vs Perímetro	Métrico-espacial	3. ^º –11. ^º	Describir y argumentar relaciones entre el perímetro y el área de figuras cuando se fija una de las dos medidas; distinguir magnitudes de distinta naturaleza.
Pitágoras Interactivo	Métrico-espacial	7. ^º –11. ^º	Reconocer y aplicar la relación entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo; justificarla por equivalencia de áreas.
Función Cuadrática	Variacional	9. ^º –11. ^º	Identificar y analizar la relación entre los parámetros de una función cuadrática y su representación gráfica: vértice, raíces, eje de simetría, concavidad.
Círculo Unitario y Ondas	Variacional / trigonométrico	10. ^º –11. ^º	Comprender las razones trigonométricas a partir del círculo unitario y modelar fenómenos periódicos mediante funciones seno y coseno.
Azar y Probabilidad	Aleatorio	6. ^º –10. ^º	Comparar la probabilidad teórica con la frecuencia relativa observada; usar diagramas de árbol y reconocer la estabilización de las frecuencias en series largas.

Tabla 3. Correspondencia entre laboratorios y aprendizajes estructurantes. Las formulaciones están parafraseadas; se recomienda contrastar la numeración exacta de cada DBA con el documento oficial del MEN antes de citarlo en un plan de área.

3.3 Los cinco pensamientos matemáticos

Los Lineamientos Curriculares de 1998 organizan la actividad matemática escolar en cinco pensamientos —numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional— asociados a sus respectivos sistemas. El catálogo actual cubre los cinco, con mayor densidad en el variacional y el métrico. Esta distribución no es casual: son los pensamientos donde la manipulación dinámica aporta el diferencial más claro respecto del papel, porque involucran covariación y transformación continua, difíciles de representar en un medio estático.

3.4 Las competencias evaluadas en Saber 11

El ICFES evalúa en Matemáticas tres competencias: interpretación y representación, formulación y ejecución, y argumentación. La tercera es transversal a todo el diseño de Didaxis Lab, por las razones expuestas en el capítulo anterior. Los bloques de retos de cada laboratorio están contruidos para cubrir las tres, con presencia obligatoria de al menos un ítem argumentativo.

Competencia Saber 11	Qué exige al estudiante	Cómo la aborda un laboratorio
Interpretación y representación	Comprender y transformar información presentada en distintos registros: tablas, gráficas, expresiones, enunciados.	Registros simultáneos y sincronizados. Ítems que piden traducir entre la gráfica manipulada y la expresión, o entre la tabla de datos y el diagrama.
Formulación y ejecución	Plantear y desarrollar estrategias para resolver un problema y verificar la validez del resultado.	Retos que exigen usar el simulador como instrumento de verificación de una estrategia planteada previamente en el cuaderno.
Argumentación	Justificar afirmaciones, validar o refutar procedimientos y reconocer la suficiencia de una razón.	Ítems de garantía cuyos distractores son conclusiones correctas mal justificadas; contraejemplos construibles; preguntas de institucionalización en la guía docente.

Tabla 4. Cobertura de las competencias evaluadas en Saber 11.

3.5 Correspondencia internacional

Aunque el proyecto está anclado en el currículo colombiano, sus principios coinciden con orientaciones internacionales que facilitan su lectura fuera del país. El marco de PISA organiza la competencia matemática en torno a los procesos de formular, emplear e interpretar situaciones en contexto, y otorga un lugar central al razonamiento. Los principios del NCTM enfatizan la representación múltiple, la comunicación y el razonamiento y prueba como estándares de proceso. Un docente de cualquier país hispanohablante puede usar los laboratorios sin traducción conceptual; solo cambia la etiqueta curricular.

PARTE II

La arquitectura

4. Arquitectura técnica: el principio offline

La decisión técnica más característica de Didaxis Lab, y la que más consecuencias tiene, es que cada recurso es un único archivo HTML autocontenido, sin dependencias externas de ningún tipo, capaz de funcionar íntegramente sin conexión a internet. Este capítulo explica en qué consiste, por qué se adoptó y qué implica.

4.1 En qué consiste

Un laboratorio de Didaxis Lab es un solo archivo con extensión .html. Dentro de ese archivo está todo: la estructura del documento, los estilos, la lógica de la simulación, los gráficos, el banco de preguntas, la retroalimentación y los textos. No hay carpeta de recursos, no hay hoja de estilos aparte, no hay biblioteca cargada desde un servidor de terceros, no hay imágenes remotas, no hay tipografías descargadas, no hay analítica, no hay llamadas a ninguna interfaz de programación externa.

La consecuencia práctica es que el archivo puede copiarse a una memoria USB, enviarse por correo, compartirse por WhatsApp, dejarse en la carpeta compartida de la sala de sistemas o subirse al aula virtual, y funcionará idénticamente en todos esos escenarios. Una vez que el archivo llegó al dispositivo, la red deja de importar.

Elemento	Enfoque convencional	Enfoque de Didaxis Lab
Estilos	Hoja CSS externa o framework desde CDN	Incrustados en el mismo archivo
Lógica	Bibliotecas de terceros cargadas por red	Código propio incrustado; sin dependencias remotas
Gráficos	Imágenes alojadas en servidor	Dibujo vectorial generado por código o SVG en línea
Tipografía	Fuentes web externas	Familias tipográficas del sistema
Datos del usuario	Envío a servidor, cuenta de usuario	Ninguno sale del dispositivo
Analítica	Rastreadores y beacons	Ninguno
Requisito de red durante el uso	Permanente	Ninguno

Tabla 5. Contraste entre la arquitectura convencional de un recurso digital y la de Didaxis Lab.

4.2 Por qué offline: la justificación de equidad

La razón de fondo no es técnica sino de justicia educativa. Según la Encuesta Nacional de Calidad de Vida del DANE, en 2025 el 73,9 % de los hogares colombianos reportó acceso a internet fijo o móvil, frente al 65,6 % del año anterior. El avance es real y considerable. Pero su lectura completa es la que importa para el diseño de un recurso escolar: aproximadamente uno de cada cuatro hogares del país sigue sin acceso, y en zonas rurales la cifra de hogares conectados es del 56,9 %, con una brecha de alrededor de veinte puntos porcentuales frente a las cabeceras municipales.

A esto se añade un dato decisivo sobre la forma del acceso: cerca de nueve de cada diez personas se conectan principalmente desde el teléfono celular. Conexión móvil significa plan de datos limitado, señal intermitente y ancho de banda variable. Un recurso pesado que exige descargar bibliotecas en cada carga consume datos que la familia paga y falla en el momento en que la señal cae.

Un recurso que exige conectividad estable durante toda la clase no es neutral: reproduce la desigualdad dentro del aula. Funciona para el estudiante conectado y falla para el que no lo está, exactamente el que más necesitaría un buen material. Y falla también, de manera colectiva, para la institución entera el día en que el proveedor tiene una caída, cosa que ocurre con regularidad en buena parte del territorio.

El principio en una frase

La conectividad debe ser una comodidad para distribuir el recurso, nunca un requisito para usarlo. Si la clase se cae cuando se cae internet, el recurso está mal diseñado.

Existe además una segunda razón, de orden pedagógico: la sobriedad técnica es una forma de sostenibilidad. Un archivo sin dependencias externas no se rompe cuando una biblioteca de terceros cambia de versión, cuando un servicio deja de existir o cuando un dominio caduca. Los recursos educativos digitales tienen una tasa de mortalidad alta por causas que nada tienen que ver con su calidad didáctica. Un archivo autocontenido de 2026 seguirá funcionando en 2036 si el navegador respeta los estándares.

4.3 Especificación técnica

Las restricciones que todo recurso debe cumplir antes de publicarse son las siguientes:

- **Cero dependencias de red externa.** Ningún recurso solicita nada a un dominio distinto del propio. Esto incluye tipografías, iconos, hojas de estilo, bibliotecas y servicios de medición.
- **Compatibilidad con políticas de seguridad de contenido estrictas.** Los recursos se diseñan para funcionar dentro de entornos con CSP restrictiva, condición necesaria para incrustarlos en plataformas institucionales endurecidas.
- **Sin almacenamiento persistente obligatorio.** El recurso no requiere escribir en el dispositivo para funcionar.
- **Sin telemetría.** No hay beacons, ni píxeles, ni registros de uso enviados a ningún servidor.
- **Diseño adaptable con prioridad móvil.** El recurso debe ser usable en un teléfono de gama media en orientación vertical y horizontal, con áreas táctiles suficientes y sin dependencia del cursor.
- **Degradación elegante.** Si un dispositivo no soporta una capacidad avanzada, el recurso conserva su función matemática esencial.
- **Peso contenido.** Se prefiere siempre la solución más ligera que cumpla la función didáctica.
- **Accesibilidad básica.** Contraste suficiente, tamaños de texto legibles, información nunca codificada solo por color, y operabilidad por teclado en los controles principales.

4.4 Incrustación e integración institucional

Los recursos están pensados para vivir dentro del aula virtual de la institución, no para obligar al estudiante a salir de ella. Se incrustan mediante un elemento de marco en línea en Moodle y en las

plataformas construidas sobre Moodle, en Google Sites, en Classroom mediante enlace, en Microsoft Teams o en cualquier gestor de contenidos que admita HTML.

Existen tres modalidades de uso, en orden creciente de independencia respecto de la red:

1. **Enlace directo.** El estudiante abre la dirección del recurso. La página se carga una vez y a partir de ahí funciona aunque la conexión se interrumpa.
2. **Incrustado en el aula virtual.** El docente pega el código de marco en línea dentro de la unidad correspondiente. El recurso queda en el contexto de la secuencia didáctica, junto a la tarea y al foro.
3. **Archivo local.** El docente descarga el archivo y lo distribuye por USB, red local o el gestor de archivos del aula. Ni siquiera la primera carga requiere internet. Esta es la modalidad diseñada para sedes rurales y para jornadas sin servicio.

En un contexto donde la institución administra su propia plataforma —el caso del entorno donde se originó el proyecto—, la tercera modalidad permite además alojar los recursos en el servidor institucional, de modo que la dependencia externa desaparece por completo.

4.5 Dispositivos, rendimiento y accesibilidad

Los recursos se prueban en teléfonos reales, no solo en el emulador del navegador de escritorio. Las pruebas en dispositivos concretos han revelado problemas que ningún emulador muestra: encabezados que se solapan con el área de juego en orientación horizontal, controles que quedan fuera de la pantalla en relaciones de aspecto alargadas, áreas táctiles demasiado pequeñas para un dedo, y texto ilegible cuando la densidad de píxeles es alta. Cada uno de esos hallazgos ha producido un ajuste.

El criterio operativo es que el dispositivo de referencia no es el computador del docente sino el teléfono del estudiante. Si el recurso funciona bien allí, funcionará en todo lo demás. La orientación horizontal se trata como escenario principal en los juegos, y la vertical como escenario principal en los laboratorios de manipulación.

4.6 Privacidad por diseño

La ausencia de registro no es una comodidad: es una posición. La Ley 1581 de 2012 regula el tratamiento de datos personales y la Ley 1098 de 2006 protege de manera reforzada a niños, niñas y adolescentes. Cualquier recurso que exija cuenta a un estudiante de básica genera obligaciones de autorización, finalidad, custodia y supresión que la mayoría de las instituciones no está en condiciones de gestionar, y que casi nunca se gestionan.

Didaxis Lab elimina el problema en la raíz: no hay dato que proteger porque no hay dato que recoger. No se solicita nombre, ni correo, ni curso, ni institución. No hay perfil, no hay historial de servidor, no hay identificador persistente. La única información que existe es la que el estudiante tiene delante mientras usa el recurso, y desaparece al cerrarlo.

Implicación para la institución

Un colegio puede autorizar el uso de estos recursos sin firmar acuerdos de tratamiento de datos, sin recoger autorizaciones de acudientes y sin abrir un riesgo de cumplimiento. Es una barrera de adopción que simplemente no existe.

4.7 Despliegue, indexación y disponibilidad

El sitio se publica mediante servicios de alojamiento estático distribuidos globalmente, lo que reduce el costo operativo prácticamente a cero y elimina la superficie de ataque asociada a un servidor con lógica de aplicación y base de datos. No hay servidor que administrar, no hay panel que asegurar, no hay base de datos que respaldar.

El sitio está indexado en buscadores y estructurado con metadatos descriptivos y un mapa del sitio, de modo que un docente que busque un simulador de un tema concreto pueda encontrarlo sin conocer previamente el proyecto. La visibilidad no es vanidad: es la condición para que un recurso abierto sea efectivamente usado por quien lo necesita.

4.8 Trazabilidad exportable sin servidor

Hay una tensión aparente entre no recoger datos y permitir que el docente sepa qué hicieron sus estudiantes. Didaxis Lab la resuelve invirtiendo la dirección del flujo: el recurso genera localmente una traza de las decisiones del estudiante y la deja disponible para que sea él quien la exporte y la entregue. Nada se envía; algo se entrega.

La traza es un registro de decisiones y no una calificación. Registra qué se intentó, en qué orden, qué se corrigió y en qué punto se estabilizó una estrategia. Su valor no es sumativo sino argumentativo: sirve como objeto de discusión posterior. «Aquí cambiaste de estrategia. ¿Por qué?» es una pregunta que solo puede hacerse si existe el registro, y es una de las preguntas más productivas que un docente de matemáticas puede formular.

Diferencia clave

Los sistemas de analítica del aprendizaje capturan datos del estudiante para el sistema. La trazabilidad de Didaxis Lab produce evidencia para el estudiante y su docente, bajo control del estudiante, sin salir del dispositivo.

5. Anatomía de un recurso

Todos los laboratorios comparten una estructura común. Esa uniformidad tiene una función pedagógica: reduce el costo de aprendizaje de la interfaz, de modo que el estudiante que ya usó un laboratorio sabe orientarse en el siguiente y puede dedicar su atención a la matemática y no a la herramienta.

5.1 Los siete componentes canónicos

- 1. Encabezado de identificación.** Título, pensamiento matemático, rango de grados y la pregunta que orienta la exploración.
- 2. Escenario manipulable.** El corazón del recurso: el objeto que el estudiante altera directamente.
- 3. Panel de magnitudes.** Lectura numérica en tiempo real de las cantidades relevantes, siempre visible junto al objeto.
- 4. Registros sincronizados.** Cuando el objeto admite varias representaciones, todas se actualizan simultáneamente.
- 5. Bloque de retos.** Preguntas de tipo Saber 11 con retroalimentación por opción.
- 6. Síntesis conceptual.** Cierre breve que institucionaliza lo explorado y, cuando corresponde, presenta la formalización simbólica.
- 7. Guía docente descargable.** Documento en PDF con la secuencia didáctica completa.

5.2 La interactividad: una taxonomía de niveles

«Interactivo» es una palabra desgastada. Un carrusel de imágenes se anuncia como interactivo. Para que el término signifique algo en el diseño, el proyecto distingue cinco niveles, y establece que un laboratorio de Didaxis Lab debe alcanzar al menos el nivel 3.

Nivel	Qué hace el estudiante	Valor didáctico	Ejemplo
1. Navegación	Avanza, retrocede, abre y cierra.	Nulo. Es un libro con botones.	Presentación con diapositivas
2. Selección	Elige entre opciones predefinidas.	Bajo. Solo verifica reconocimiento.	Cuestionario de opción múltiple
3. Manipulación directa	Altera continuamente un parámetro y observa el efecto.	Alto. Permite percibir covariación.	Mover a, b y c en la parábola
4. Construcción	Crea un objeto que cumpla una condición dada.	Muy alto. Exige anticipar el efecto antes de actuar.	Construir un contraejemplo
5. Argumentación mediada	Justifica una afirmación usando el objeto como evidencia.	Máximo. Integra evidencia y garantía.	Refutar una generalización con un caso construido

Tabla 6. Niveles de interactividad. El proyecto exige nivel 3 como mínimo y aspira a los niveles 4 y 5.

La distinción tiene una consecuencia práctica en la evaluación de recursos ajenos: buena parte de la oferta digital educativa se sitúa entre los niveles 1 y 2 mientras se presenta como si estuviera en el 4. El criterio de discriminación es simple: ¿puede el estudiante producir un estado del objeto que el diseñador no previó explícitamente? Si la respuesta es no, no hay manipulación real.

La manipulación directa aporta, además, algo que ninguna cantidad de ejemplos estáticos aporta: la percepción de la covariación. Ver veinte parábolas dibujadas no es lo mismo que mover un parámetro y sentir cómo la curva responde. La primera experiencia entrega casos; la segunda entrega la relación entre ellos, que es el objeto matemático.

5.3 Los retos: diseño de las preguntas

Cada laboratorio incluye un bloque de retos de formato equivalente al de la prueba Saber 11. La decisión de adoptar ese formato no obedece al entrenamiento para el examen sino a dos razones didácticas: el formato es familiar para el estudiante colombiano, y su estructura —enunciado en contexto, cuatro opciones, distractores contruidos sobre errores típicos— es un buen instrumento de diagnóstico cuando los distractores se diseñan bien.

Las reglas de construcción de los retos son:

- Todo reto se resuelve con lo explorado en el laboratorio, no con conocimiento externo no anticipado.
- Cada bloque cubre las tres competencias evaluadas y contiene al menos un ítem de argumentación.
- Cada distractor corresponde a un error conceptual documentado, no a una alternativa aleatoria.
- Al menos un ítem exige una inferencia adicional que no se resuelve por lectura visual directa.
- El enunciado se sitúa en un contexto plausible, sin recurrir a escenarios artificiales que aumenten la carga de lectura sin aportar sentido.
- La progresión va de la constatación a la generalización, y de la generalización a la justificación.

Ejemplo de ítem argumentativo bien construido

Enunciado: Un estudiante afirma que si el perímetro de un rectángulo aumenta, su área también aumenta. ¿Cuál de las siguientes situaciones permite decidir si la afirmación es verdadera?

Por qué funciona: La pregunta no pide el resultado —que puede intuirse— sino el tipo de evidencia que decide la cuestión. Los distractores ofrecen evidencias insuficientes: casos particulares que confirman sin probar, o mediciones que no discriminan. Responder exige comprender qué es un contraejemplo y por qué basta uno para refutar una generalización.

5.4 La retroalimentación: errores frecuentes como material de diseño

La calidad de un bloque de retos depende enteramente de la calidad de sus distractores, y la calidad de los distractores depende de conocer los errores que los estudiantes cometen realmente. Estos errores no son fallos de atención: son concepciones alternativas coherentes, con lógica interna, que funcionan en un rango de casos y fallan fuera de él.

Concepción alternativa	Cómo se manifiesta	Tratamiento en el laboratorio
Perímetro y área covarían siempre	Se asume que a mayor perímetro, mayor área.	Deformar el rectángulo con perímetro constante y ver el área caer.
El numerador y el denominador son enteros independientes	Se compara $1/3$ con $1/5$ y se concluye que $1/5$ es mayor.	Comparar las cuatro representaciones simultáneas de ambas fracciones.
Pitágoras vale para cualquier triángulo	Se aplica la relación sin verificar el ángulo recto.	Mover un vértice hasta perder el ángulo recto y ver romperse la igualdad de áreas.
El signo de a controla la posición del vértice	Se confunde concavidad con desplazamiento.	Aislar el efecto de cada parámetro moviendo uno a la vez.
Falacia del jugador	Tras varias caras seguidas se espera que la siguiente sea sello.	Series largas y contraste entre frecuencia acumulada y resultado individual.
Seno y coseno son solo razones de triángulos	No se reconoce su carácter funcional ni periódico.	Recorrer el círculo unitario y ver trazarse la onda.

Tabla 7. Concepciones alternativas documentadas y su tratamiento en los laboratorios.

Es importante subrayar la estrategia general: el laboratorio no refuta la concepción alternativa con una explicación. La refuta con un objeto que el estudiante manipula y que produce, ante sus ojos, un resultado incompatible con lo que esperaba. La discrepancia entre expectativa y observación es el motor del cambio conceptual, y por eso la anticipación previa —el compromiso con una predicción— es una parte indispensable del diseño.

5.5 La guía docente

La guía docente es el componente que convierte un objeto interactivo en un recurso didáctico. Sin ella, el laboratorio queda a merced de la improvisación; con ella, se integra a una secuencia con propósito, tiempos y criterios de cierre. Es también el componente que hace el recurso utilizable por un docente que no diseñó el laboratorio y que dispone de quince minutos para prepararlo.

Toda guía sigue la misma estructura de nueve secciones:

- 1. Identificación.** Grados, pensamiento matemático, DBA y estándares abordados, competencias evaluadas y tiempo estimado.
- 2. Objetivo de aprendizaje.** Formulado en términos observables de lo que el estudiante será capaz de hacer.
- 3. Conocimientos previos.** Lo que el estudiante debe traer, y una comprobación rápida para verificarlo.
- 4. Secuencia sugerida en tres momentos.** Anticipación, exploración y formalización, con tiempos y consignas.
- 5. Preguntas de orquestación.** El guion de intervención del docente durante la exploración: qué preguntar, cuándo intervenir y cuándo callar.
- 6. Errores frecuentes y su lectura diagnóstica.** Qué significa cada error y cómo abordarlo sin corregir por decreto.
- 7. Preguntas de institucionalización.** Para la puesta en común: qué debe quedar establecido colectivamente y con qué nivel de justificación se considera aceptable en cada grado.

8. Variantes de implementación. Con un dispositivo por estudiante, con dispositivos compartidos, con un solo proyector, y sin conectividad.

9. Evaluación y extensión. Criterios de logro, uso de la traza y tareas de profundización.

La sección más importante

Las preguntas de orquestación son lo que distingue esta guía de una ficha de instrucciones. Le dicen al docente cuándo no intervenir, que es la decisión más difícil y la que más determina si el estudiante llega a formular una conjetura propia. Un docente que resuelve la conjetura por el estudiante ha convertido un laboratorio en una demostración.

5.6 El marco de calidad y el protocolo de publicación

El proyecto opera con un marco de calidad interno y una plantilla de creación que estandariza el proceso de construcción de cada recurso. Su función es evitar que la calidad dependa del estado de ánimo o del tiempo disponible en el momento de construir: si el recurso no supera la lista de verificación, no se publica.

Dimensión	Criterio verificable
Didáctica	Parte de un fenómeno manipulable; la formalización aparece al final; alcanza al menos el nivel 3 de interactividad.
Curricular	Declara DBA, estándar, pensamiento, grados y competencias; los retos cubren las tres competencias.
Evaluativa	Cada distractor corresponde a un error documentado; cada opción tiene retroalimentación propia; hay al menos un ítem argumentativo.
Técnica	Archivo único; sin dependencias externas; compatible con CSP estricta; sin telemetría.
Usabilidad	Probado en teléfono real en ambas orientaciones; áreas táctiles suficientes; sin desbordamientos.
Accesibilidad	Contraste suficiente; ninguna información codificada solo por color; texto legible sin ampliación.
Documental	Guía docente completa en PDF, con las nueve secciones.
Legal	Licencia y autoría declaradas; sin materiales de terceros sin licencia compatible.

Tabla 8. Lista de verificación previa a la publicación de un recurso.

PARTE III

El catálogo

6. Los seis laboratorios

Cada laboratorio se presenta con la misma estructura: la pregunta que lo origina, el fenómeno que hace visible, lo que el estudiante manipula, el obstáculo epistemológico que ataca y las notas de orquestación más relevantes. La ficha técnica resume la información curricular.

6.1 Fracciones Vivas

La pregunta: ¿qué es, exactamente, una fracción?

La fracción es el primer objeto matemático que rompe la intuición construida sobre los números naturales, y es también el origen de una fractura que arrastran muchos estudiantes hasta la educación media. El problema no es operatorio sino conceptual: la fracción no es un número sino un objeto con al menos cinco significados distintos —relación parte-todo, cociente, razón, operador y medida— que la escuela suele presentar como si fueran uno solo, y casi siempre desde el primero de ellos.

Fracciones Vivas ataca directamente el obstáculo dominante: la lectura de la fracción como dos números enteros yuxtapuestos. El estudiante que compara un tercio con un quinto y concluye que el quinto es mayor no está distraído; está aplicando consistentemente la regla de los naturales al numerador y al denominador por separado. Ninguna explicación verbal desmonta esa regla, porque la regla funciona en el dominio en que fue aprendida.

El laboratorio muestra la misma fracción simultáneamente como región circular, como barra rectangular, como conjunto de objetos discretos y como punto sobre la recta numérica, con las cuatro representaciones sincronizadas en tiempo real. Cuando el estudiante modifica la fracción, las cuatro cambian a la vez. La equivalencia entre representaciones no se enuncia: se constata. Y el paso decisivo es la recta numérica, porque es la representación que obliga a reconocer la fracción como un número con posición y no como una configuración de partes.

Nota de orquestación: la comparación de dos fracciones con numeradores iguales y denominadores distintos debe realizarse siempre con anticipación previa escrita. Sin el compromiso anterior, el estudiante lee el resultado en pantalla y cree haberlo sabido siempre.

Campo	Descripción
Pensamiento	Numérico
Grados	3.º a 7.º
Registros	Circular, rectangular, discreto y recta numérica, sincronizados
Obstáculo que ataca	Lectura de la fracción como dos naturales independientes
Nivel de interactividad	3 (manipulación directa) con extensiones de nivel 4
Conexión con Saber 11	Interpretación y representación; base para razones y proporcionalidad

6.2 Área vs Perímetro

La pregunta: si el perímetro aumenta, ¿aumenta también el área?

Este es probablemente el laboratorio más argumentativo del catálogo y el que mejor ilustra la filosofía del proyecto. La concepción de que perímetro y área covarían es universal, robusta y persistente hasta la educación media; su origen es razonable, porque en las familias de figuras que la escuela presenta con más frecuencia —cuadrados que crecen, círculos que se agrandan— efectivamente covarían.

El laboratorio permite deformar un rectángulo y observar cómo las dos magnitudes evolucionan de manera independiente. La experiencia clave es fijar el perímetro y variar la forma: el estudiante ve el área alcanzar su máximo en el cuadrado y decrecer hacia cero a medida que el rectángulo se alarga, sin que el perímetro cambie en absoluto. Un solo caso construido por el propio estudiante refuta la generalización.

El valor didáctico va más allá del contenido métrico. Aquí el estudiante hace, con un objeto, la operación lógica fundamental de la matemática: refutar una afirmación general mediante un contraejemplo. Esta experiencia es transferible. Un estudiante que ha refutado con sus manos comprende, de un modo que ninguna definición transmite, por qué muchos ejemplos favorables no prueban nada y por qué un solo caso contrario lo decide todo.

El laboratorio es también el que abarca el rango de grados más amplio del catálogo, de tercero a undécimo. En los grados iniciales trabaja la distinción entre dos magnitudes de naturaleza distinta; en los grados superiores se convierte en un problema de optimización, con la pregunta de qué rectángulo de perímetro fijo maximiza el área, que conecta directamente con la función cuadrática.

Nota de orquestación: resista la tentación de anunciar la conclusión. El momento de mayor valor pedagógico es el desconcierto que se produce cuando la predicción falla. Formule allí la pregunta: «¿qué está pasando?», y espere.

Campo	Descripción
Pensamiento	Métrico-espacial
Grados	3.º a 11.º
Registros	Figural dinámico y numérico simultáneo
Obstáculo que ataca	Covariación necesaria entre perímetro y área
Nivel de interactividad	4 (construcción de contraejemplo)
Conexión con Saber 11	Argumentación; extensión a optimización en media

6.3 Pitágoras Interactivo

La pregunta: ¿por qué $a^2 + b^2 = c^2$?

El teorema de Pitágoras es, con toda probabilidad, el resultado más memorizado y menos comprendido de la matemática escolar. Se aprende como fórmula de cálculo de un lado faltante y rara vez como enunciado sobre áreas, que es lo que efectivamente es. La expresión $a^2 + b^2 = c^2$ no habla de

longitudes elevadas al cuadrado: habla de cuadrados contruidos sobre los lados, y de la equivalencia entre la suma de dos de esas áreas y la tercera.

El laboratorio devuelve al enunciado su significado geométrico. El estudiante arrastra los vértices de un triángulo rectángulo y ve, sobre cada lado, el cuadrado correspondiente con su área calculada. La igualdad se mantiene en todos los casos, y el estudiante puede verificarla numéricamente para configuraciones que él mismo elige. Pero el momento más instructivo es el que rompe la condición: al mover un vértice hasta que el ángulo deja de ser recto, la igualdad se rompe.

Esa ruptura es la parte del laboratorio que ningún libro de texto ofrece con la misma fuerza. Aprender la hipótesis de un teorema mediante su violación es una experiencia argumentativa de primer orden: el estudiante descubre que las condiciones de un enunciado no son un preámbulo formal sino lo que lo hace verdadero. La discriminación entre «vale siempre» y «vale bajo estas condiciones» es una de las distinciones más difíciles de instalar y una de las que más rendimiento tiene en argumentación.

Nota de orquestación: pida al estudiante que escriba el enunciado completo del teorema incluyendo la condición, antes y después de romperla en el simulador. La comparación entre ambas redacciones es evidencia directa de aprendizaje.

Campo	Descripción
Pensamiento	Métrico-espacial
Grados	7.º a 11.º
Registros	Figural dinámico, numérico y algebraico
Obstáculo que ataca	Aplicación del teorema sin verificar la condición de ángulo recto; lectura de la fórmula como cálculo y no como enunciado sobre áreas
Nivel de interactividad	4 (verificación y ruptura de la hipótesis)
Conexión con Saber 11	Argumentación; interpretación y representación; base de trigonometría

6.4 Función Cuadrática

La pregunta: ¿qué hace cada parámetro?

El estudio de la función cuadrática suele reducirse a un conjunto de procedimientos —factorizar, aplicar la fórmula general, calcular el vértice— sin que se construya la relación entre la expresión algebraica y la forma de la curva. El resultado es un estudiante capaz de hallar las raíces y absolutamente incapaz de anticipar qué le ocurre a la parábola si a se hace negativo.

El laboratorio establece esa relación mediante manipulación directa: el estudiante mueve los parámetros a , b y c y observa en tiempo real la parábola, el vértice, las raíces y el eje de simetría. Lo esencial es la restricción metodológica que la guía impone: variar un parámetro a la vez. Sin ese control, la exploración produce ruido en lugar de conocimiento; con él, cada parámetro revela su papel específico.

Hay tres descubrimientos que el laboratorio provoca de manera fiable. Que el signo de a determina la concavidad y su magnitud la apertura. Que c es la ordenada del punto de corte con el eje vertical, lo que se ve de inmediato al moverlo. Y que b , el parámetro más difícil de interpretar, no desplaza la parábola horizontalmente de manera simple sino que interviene junto con a en la posición del vértice: el vértice describe una trayectoria propia cuando b varía, y esa trayectoria es en sí misma un objeto matemático interesante.

El laboratorio conecta hacia atrás con Área vs Perímetro —el problema de optimización del rectángulo de perímetro fijo es una parábola— y hacia adelante con el estudio general de funciones, incluidas las racionales, donde la lectura de parámetros y comportamientos es la misma competencia aplicada a otro objeto.

Nota de orquestación: exija que la exploración se registre en una tabla de tres columnas: parámetro modificado, efecto observado y conjetura. La conjetura escrita es lo que después puede ser sometida a prueba y refutada, y es el insumo de la puesta en común.

Campo	Descripción
Pensamiento	Variacional
Grados	9.º a 11.º
Registros	Algebraico, gráfico y numérico sincronizados
Obstáculo que ataca	Desconexión entre expresión algebraica y forma gráfica; interpretación errónea del papel de b
Nivel de interactividad	3 con extensión a 4 (construir una parábola que cumpla condiciones dadas)
Conexión con Saber 11	Las tres competencias; núcleo del pensamiento variacional evaluado

6.5 Círculo Unitario y Ondas

La pregunta: ¿cómo pasa un giro a ser una onda?

La trigonometría escolar se enseña habitualmente en dos bloques que el estudiante nunca logra unir: primero las razones trigonométricas como cocientes de lados de un triángulo rectángulo, después las funciones trigonométricas como curvas periódicas. La transición entre ambos —el paso de razón a función— es el punto donde se pierde la mayoría, porque es el punto donde el objeto cambia de naturaleza sin que nadie lo advierta explícitamente.

Este laboratorio hace visible esa transición, que es probablemente la conversión de registros más difícil del currículo de media. El estudiante manipula el ángulo sobre el círculo unitario y ve, simultáneamente, cómo se generan el seno, el coseno y la tangente, y cómo el valor del seno se va trazando como ordenada de una curva a medida que el ángulo avanza. La onda no aparece como un objeto nuevo: aparece como el registro del movimiento circular.

Comprendido eso, la periodicidad deja de ser una propiedad que hay que memorizar y se convierte en una consecuencia evidente: la onda se repite porque el punto vuelve a pasar por donde ya estuvo. Del

mismo modo, el signo del seno y del coseno en cada cuadrante, que suele aprenderse con reglas mnemotécnicas, se lee directamente sobre la posición del punto.

El laboratorio abre además la puerta a la modelación de fenómenos periódicos —mareas, ciclos, movimientos oscilatorios—, que es donde la trigonometría adquiere sentido aplicado y donde aparece con más frecuencia en las pruebas estandarizadas.

Nota de orquestación: detenga la exploración en los ángulos notables y pida la lectura simultánea en ambos registros. La correspondencia entre la posición del punto y la altura de la curva debe verbalizarse explícitamente, no darse por vista.

Campo	Descripción
Pensamiento	Variacional y métrico (trigonometría)
Grados	10.º a 11.º
Registros	Geométrico circular, gráfico funcional y numérico
Obstáculo que ataca	Desconexión entre razón trigonométrica y función periódica
Nivel de interactividad	3 (manipulación continua del ángulo)
Conexión con Saber 11	Interpretación y representación; modelación de fenómenos periódicos

6.6 Azar y Probabilidad

La pregunta: ¿por qué el azar se vuelve predecible cuando hay muchos casos?

El pensamiento aleatorio es el más descuidado del currículo colombiano y el que arrastra intuiciones erróneas más resistentes. La falacia del jugador —creer que tras varias caras seguidas es más probable un sello— y la insensibilidad al tamaño de la muestra están documentadas incluso en adultos con formación estadística. Son errores de intuición, no de cálculo, y por eso no se corrigen con fórmulas.

Se corrigen, en cambio, con experiencia de series largas, que es exactamente lo que el aula no puede ofrecer: lanzar una moneda mil veces es materialmente imposible en cuarenta y cinco minutos. Este es el caso en que la simulación no complementa la experiencia sino que la hace posible.

El laboratorio permite contrastar la probabilidad teórica con la frecuencia relativa observada usando monedas, dados, diagramas de árbol y ruletas. El estudiante ve la frecuencia acumulada oscilar violentamente en las primeras repeticiones y estabilizarse progresivamente en torno al valor teórico. La ley de los grandes números deja de ser un enunciado y se convierte en una curva que el estudiante vio formarse.

El punto conceptual que la guía subraya es que la estabilización de la frecuencia global no implica compensación en los casos individuales. La moneda no lleva memoria; el siguiente lanzamiento sigue siendo equiprobable. Esta distinción entre el comportamiento agregado y el caso particular es el núcleo del pensamiento probabilístico y es lo que separa la comprensión de la superstición.

Nota de orquestación: haga que el grupo prediga por escrito la forma de la curva de frecuencia acumulada antes de la primera simulación, y compare las predicciones con lo observado. La discrepancia colectiva es el mejor punto de partida para la discusión.

Campo	Descripción
Pensamiento	Aleatorio
Grados	6.º a 10.º
Registros	Simulación, tabla de frecuencias, gráfico de convergencia y diagrama de árbol
Obstáculo que ataca	Falacia del jugador; confusión entre comportamiento agregado y caso individual
Nivel de interactividad	3 con extensión a 4 (diseñar un experimento que discrimine entre dos hipótesis)
Conexión con Saber 11	Argumentación e interpretación; componente aleatorio de la prueba

7. Los juegos matemáticos

Los juegos amplían el catálogo hacia un territorio distinto. Un laboratorio se usa una vez, para comprender algo. Un juego se usa repetidamente, para consolidar y automatizar lo comprendido, y para sostener la práctica en un rango de motivación que el ejercicio repetido no alcanza.

7.1 Criterio de diseño: la mecánica es el contenido

El riesgo permanente del juego educativo es que la matemática quede como peaje entre dos momentos divertidos: se resuelve un ejercicio para poder seguir jugando. Ese diseño enseña que la matemática es el precio de la diversión, que es exactamente el mensaje que no se quiere transmitir.

Los juegos de Didaxis Lab se construyen bajo la regla contraria: la acción matemática es la acción de juego. No hay una capa lúdica y una capa matemática; hay una sola. Se sigue de ahí un segundo criterio, sobre lo que no se incluye: no hay rachas diarias, ni vidas que se recargan con el tiempo, ni presión social, ni ninguna otra mecánica cuya función sea maximizar el tiempo de uso. Un buen juego educativo debe poder cerrarse sin culpa.

Dimensión	Laboratorio	Juego
Propósito	Comprender un fenómeno por primera vez	Consolidar y automatizar lo comprendido
Uso	Una o dos sesiones	Repetido a lo largo de una unidad
Ritmo	Lo marca el estudiante	Lo marca el sistema
Error	Se explora y se explica	Tiene consecuencia inmediata dentro del juego
Argumentación	Durante la actividad	Después de la partida, sobre la traza
Momento didáctico	Introducción de un concepto	Ejercitación y cierre de unidad

Tabla 9. Diferencias funcionales entre laboratorio y juego.

7.2 Guardianes del Cero

Contenido: números enteros, ley de los signos, adición y sustracción con signo.

Es un juego de defensa por oleadas. Oleadas de valores numéricos avanzan hacia la base y el estudiante debe neutralizarlas colocando torres que aportan valores de signo opuesto. La condición de victoria es llevar el valor de la amenaza a cero. Todo el vocabulario del juego —neutralizar, compensar, anular— es el vocabulario del inverso aditivo, y la mecánica central es la ley de los signos aplicada bajo presión de tiempo.

El diseño aprovecha una intuición que la enseñanza formal suele desperdiciar: el estudiante comprende perfectamente la compensación en contextos concretos —deuda y pago, ascenso y descenso— y falla cuando la misma operación se presenta simbólicamente. El juego mantiene el contexto de compensación durante toda la partida y deja que la simbolización se instale por uso.

La progresión de dificultad introduce enemigos con mayor resistencia y encuentros de jefe en oleadas avanzadas, que exigen combinar varias torres y por tanto planear una suma de varios términos con signo en lugar de una operación aislada. La presión de tiempo obliga al cálculo mental rápido, que es precisamente lo que se busca automatizar.

El juego incorpora un repaso de la ley de los signos accesible desde la pantalla inicial, para el estudiante que necesita revisarla antes de jugar o durante la pausa, y genera una traza exportable de decisiones para el trabajo posterior.

Una decisión de diseño explícita

Se evaluó exigir al estudiante justificar cada colocación de torre y se descartó. Mientras el estudiante redacta, la amenaza avanza; la exigencia argumentativa dentro de la partida produce frustración y empuja a responder por descarte. La justificación se traslada al momento posterior, sobre la traza exportada. Es preferible respetar la lógica del formato que forzarlo a cumplir una función para la que no sirve.

7.3 Guardianes del Claro

Contenido: evaluación de funciones lineales, cuadráticas y exponenciales; comparación de tasas de crecimiento.

Ambientado en un bosque medieval y construido con gráficos tridimensionales, el juego plantea una defensa por noches sucesivas. Antes de cada noche, el estudiante debe anticipar la magnitud de la amenaza evaluando una función en la que la variable independiente es el número de la noche. Con esa anticipación distribuye sus recursos defensivos. Si la evaluación es incorrecta, la defensa es insuficiente y la consecuencia es inmediata.

Este es el punto donde el juego hace algo que un ejercicio no puede hacer: convierte la evaluación de una función en una decisión con consecuencia. Evaluar $f(7)$ en una hoja produce un número que se corrige o no se corrige. Evaluar $f(7)$ para decidir cuántos defensores desplegar produce una experiencia de la diferencia entre estar bien y estar mal, y esa diferencia es lo que fija el aprendizaje.

El diseño hace visible, además, la comparación entre tasas de crecimiento, que es un contenido difícil y de alto rendimiento. Una amenaza de crecimiento lineal es manejable indefinidamente; una de crecimiento exponencial se vuelve inmanejable en pocas noches, aunque en las primeras parezca inofensiva. El estudiante que ha perdido una partida por subestimar una exponencial ha aprendido algo sobre el crecimiento exponencial que ninguna tabla comunica.

El juego incluye un bestiario consultable que funciona como registro tabular: para cada criatura, la función que gobierna su aparición. La consulta del bestiario es una lectura de registro algebraico con propósito, no un ejercicio de lectura de tabla.

La retroalimentación del error se entrega inmediatamente después de la animación de la emboscada, no antes: primero se ve la consecuencia, después se explica el error. El orden importa, porque la consecuencia crea la necesidad de la explicación. Se mantiene una sola pregunta por noche para preservar el ritmo de juego.

7.4 Misión Número Secreto

Contenido: deducción numérica, propiedades de los números, razonamiento por eliminación.

El estudiante debe identificar un número oculto a partir de pistas sucesivas, descartando candidatos hasta que solo uno resulte compatible con toda la información disponible. La estructura es la de la deducción: cada pista restringe el espacio de posibilidades, y la solución se alcanza no por cálculo sino por eliminación razonada.

Su valor didáctico es distinto al de los otros dos juegos. Aquí el objeto de aprendizaje no es un contenido específico sino una forma de razonamiento: la inferencia por descarte, el uso de la información negativa —saber qué no es algo también informa— y la noción de suficiencia, es decir, reconocer cuándo se tiene información bastante para concluir y cuándo no.

Esa noción de suficiencia es exactamente la que la competencia argumentativa de Saber 11 evalúa cuando pregunta si una información basta para decidir una afirmación. El juego la entrena en un formato en que el estudiante puede equivocarse sin costo y volver a intentarlo, y en el que la respuesta prematura tiene una consecuencia visible.

Nota de orquestación: el momento de mayor valor no es acertar el número sino explicar la secuencia de descartes. Pida al estudiante que reconstruya oralmente por qué cada pista eliminó lo que eliminó; ahí está el argumento.

7.5 Uso didáctico de los juegos

- **Nunca como sustituto de la comprensión inicial.** El juego consolida algo ya comprendido. Un estudiante que no entiende la ley de los signos no la aprenderá jugando: la evadirá por ensayo y error.
- **Con puesta en común obligatoria.** Diez minutos de discusión sobre la traza valen más que veinte minutos adicionales de partida.
- **Con tiempo acotado.** Sesiones de quince a veinte minutos. La saturación degrada la calidad del razonamiento y convierte el juego en rutina motriz.
- **Sin convertir la puntuación en calificación.** En el momento en que el marcador vale nota, el estudiante optimiza el marcador y no el aprendizaje.
- **Con la pregunta correcta al cierre.** No «¿cuánto sacaste?» sino «¿en qué momento cambiaste de estrategia y por qué?».

PARTE IV

El impacto

8. Beneficios para la población colombiana

Este capítulo expone el argumento de pertinencia social del proyecto. Se apoya en datos públicos y distingue con cuidado entre lo que el proyecto efectivamente hace y lo que solo puede aspirar a producir. Un recurso educativo no mejora resultados por existir; mejora las condiciones bajo las cuales un docente puede hacer mejor su trabajo.

8.1 El punto de partida: dos brechas simultáneas

Colombia enfrenta en educación matemática dos brechas que se refuerzan mutuamente. La primera es la brecha digital. Según la Encuesta Nacional de Calidad de Vida del DANE, en 2025 el 73,9 % de los hogares del país reportó acceso a internet fijo o móvil, frente al 65,6 % de 2024, y por primera vez más de la mitad de los hogares rurales —el 56,9 %— quedó conectada. El progreso es sustantivo y merece reconocerse. También merece leerse completo: alrededor de una cuarta parte de los hogares sigue sin acceso, la distancia entre cabeceras y zonas rurales ronda los veinte puntos porcentuales, y el acceso ocurre predominantemente por celular, con las limitaciones de datos y estabilidad que eso implica.

La segunda es la brecha de aprendizaje. Los resultados de Saber 11 de 2025 muestran un promedio global nacional en torno a los 257,6 puntos sobre 500, con una mejora de aproximadamente punto y medio frente al año anterior. Pero el dato relevante no es el promedio sino su distribución: los establecimientos no oficiales promediaron cerca de 277 puntos y los oficiales cerca de 250, y la diferencia entre ambos sectores se amplió respecto de 2024. La mejora del promedio nacional convive con un ensanchamiento de la brecha.

Las dos brechas se cruzan de manera perversa. El estudiante con menor acceso a conectividad es, con alta probabilidad, el mismo que asiste a la institución con menor desempeño. Un recurso educativo digital que exija buena conexión llega, por construcción, a quien menos lo necesita. Ese es el problema concreto que la arquitectura offline del proyecto intenta no reproducir.

Indicador	Dato	Fuente
Hogares con acceso a internet, 2025	73,9 % (65,6 % en 2024)	DANE, ECV 2025
Hogares rurales con acceso a internet, 2025	56,9 %	DANE, ECV 2025
Brecha urbano-rural en acceso	Alrededor de 20 puntos porcentuales	DANE, ECV 2025
Personas de 5 años o más que usaron internet	82,3 %	DANE, ECV 2025
Personas que usan celular	91,9 %	DANE, ECV 2025
Promedio global Saber 11, 2025	≈ 257,6 sobre 500	Análisis sobre datos ICFES
Promedio sector oficial vs no oficial, 2025	≈ 249,6 frente a ≈ 277,1	LEE, Universidad Javeriana

Tabla 10. Indicadores de contexto. Las cifras corresponden a los reportes disponibles a la fecha de esta versión.

8.2 Beneficios concretos y verificables

Los siguientes beneficios no son proyecciones: se derivan directamente de las propiedades del recurso y pueden comprobarse abriendo el sitio.

- 1. Costo cero real, no cero condicionado.** No hay versión gratuita limitada, ni prueba temporal, ni licencia por número de estudiantes. Una institución con presupuesto nulo para material digital tiene acceso completo al catálogo.
- 2. Funcionamiento sin conectividad durante el uso.** Una vez cargado el archivo, el recurso funciona íntegramente sin red. Esto habilita su uso en sedes rurales, en jornadas con servicio caído y en dispositivos sin plan de datos.
- 3. Distribución por medios no digitales.** El archivo puede llevarse en memoria USB a una sede sin conexión. Es la vía por la que el recurso llega efectivamente a los territorios más aislados.
- 4. Sin barrera de registro ni de datos personales.** Ningún estudiante entrega información. Ninguna institución asume obligaciones de tratamiento de datos de menores.
- 5. Alineación curricular nacional explícita.** Los recursos declaran DBA, estándares y competencias, lo que permite al docente justificarlos en su plan de área sin trabajo adicional.
- 6. Idioma y contexto propios.** Español de Colombia, con notación y vocabulario del currículo nacional. No hay traducción ni transposición de un currículo ajeno.
- 7. Formato de evaluación reconocible.** Los retos usan la estructura de la prueba Saber 11, lo que familiariza al estudiante con el formato sin dedicarle tiempo específico de entrenamiento.
- 8. Licencia que permite adaptación.** Bajo CC BY 4.0, una secretaría de educación o una institución puede modificar los recursos para su contexto y redistribuirlos, siempre que cite la fuente.
- 9. Funcionamiento en el dispositivo que la gente tiene.** Diseñado con prioridad para el teléfono celular, que es el medio de acceso de nueve de cada diez personas.
- 10. Reducción del tiempo de preparación docente.** La guía docente entrega la secuencia, las preguntas de orquestación y el diagnóstico de errores ya elaborados.

8.3 Beneficios por actor

Actor	Qué obtiene
Estudiante	Acceso a material de calidad sin costo ni registro; experiencia de manipulación que el papel no ofrece; retroalimentación que explica el error en lugar de marcarlo; entrenamiento indirecto en el formato de la evaluación nacional.
Docente de matemáticas	Recursos listos para usar con guía completa; reducción del tiempo de preparación; diagnóstico grupal a partir de la distribución de errores; material para diferenciar por nivel dentro del mismo grupo.
Institución educativa	Enriquecimiento del plan de área sin costo; ausencia de riesgo de cumplimiento en protección de datos; recursos incrustables en la plataforma propia; evidencia de innovación pedagógica documentable para procesos de calidad.
Coordinación académica	Trazabilidad curricular explícita entre recurso, DBA y competencia evaluada; insumo concreto para el mejoramiento del área de matemáticas.

Actor	Qué obtiene
Familias	Un recurso que el estudiante puede usar en casa sin consumir datos, sin crear cuenta y sin exponer información del menor.
Sistema educativo	Un banco de recursos abiertos, adaptables y citables, disponible para replicación en cualquier territorio sin negociación de licencias.

Tabla 11. Beneficios diferenciados por actor del sistema educativo.

8.4 Lo que el proyecto no puede prometer

La honestidad sobre los límites es parte del argumento de calidad. Didaxis Lab no puede prometer mejora en los resultados de Saber 11: esa mejora depende de la práctica docente, del tiempo efectivo de clase, de las condiciones socioeconómicas del estudiante y de decenas de factores que un recurso no controla. No puede prometer motivación sostenida: la novedad de un recurso digital se agota. No puede compensar la ausencia de un docente formado en el área, que es un problema estructural del sistema y no un problema de materiales.

Lo que sí puede afirmarse con fundamento es esto: elimina barreras de acceso reales y verificables, y pone a disposición del docente un instrumento que hace visible aquello que en el papel permanece invisible. Qué se haga con ese instrumento sigue siendo, íntegramente, una decisión pedagógica.

9. Uso en el aula

9.1 La secuencia de tres momentos

Todos los laboratorios están diseñados para una secuencia de tres momentos que la guía docente detalla y que ocupa entre cuarenta y cinco y noventa minutos según el grado.

Momento	Duración	Qué ocurre	Rol del docente
Anticipación	10-15 min	Se plantea la pregunta orientadora. Cada estudiante escribe su predicción antes de tocar el simulador.	Formular la pregunta y garantizar que todos se comprometan por escrito. No adelantar nada.
Exploración	20-30 min	Manipulación del objeto, registro de observaciones, contraste con la predicción, formulación de conjeturas.	Circular, preguntar, no resolver. Detectar conjeturas divergentes para la puesta en común.
Formalización	15-25 min	Puesta en común, discusión de conjeturas, institucionalización del resultado y resolución de los retos.	Orquestrar la discusión, exigir justificación, establecer qué queda validado y con qué nivel de argumento.

Tabla 12. Estructura de una sesión con laboratorio.

El momento de anticipación es el que con más frecuencia se omite y el que menos puede omitirse. Sin predicción previa, la observación no genera conflicto cognitivo: el estudiante ve lo que ocurre y lo acepta sin haber comprometido nada. La escritura de la predicción es lo que convierte la observación en evidencia y la evidencia en argumento.

9.2 Modelos de implementación según la infraestructura

- **Un dispositivo por estudiante.** Escenario ideal. Exploración individual con puesta en común colectiva. Riesgo a vigilar: el silencio; conviene forzar el intercambio en parejas antes de la discusión general.
- **Dispositivos compartidos en parejas o tríos.** Escenario frecuentemente superior al anterior, porque obliga a verbalizar. Asigne roles rotativos: quien manipula, quien registra y quien formula la conjetura.
- **Un solo proyector.** Funciona si el docente cede la manipulación a los estudiantes por turnos y mantiene la exigencia de predicción escrita individual. No funciona si el docente manipula y explica: eso convierte el laboratorio en demostración.
- **Sala de sistemas sin internet.** Archivos distribuidos por red local o USB. Es el escenario para el que la arquitectura fue diseñada.
- **Aula invertida.** Exploración en casa con la guía de anticipación; la clase se dedica íntegramente a la discusión de conjeturas y a la formalización.
- **Trabajo asincrónico en el aula virtual.** Laboratorio incrustado en la unidad, con la predicción y la conjetura entregadas en un foro y la puesta en común en la sesión siguiente.

9.3 Orquestación argumentativa

La calidad de la sesión depende, más que del recurso, de las intervenciones del docente. La guía adopta cuatro acciones de orquestación que estructuran la puesta en común:

1. **Preguntar.** Devolver la pregunta al estudiante en lugar de responderla. «¿Cómo lo sabes?» y «¿siempre pasa?» son las dos preguntas de mayor rendimiento.
2. **Refutar.** Proponer un caso que ponga a prueba la conjetura, o pedir a otro estudiante que lo haga. El contraejemplo debe venir del grupo siempre que sea posible.
3. **Validar.** Reconocer explícitamente cuándo una justificación es suficiente y por qué. La validación sin explicitación de criterio no enseña el criterio.
4. **Institucionalizar.** Establecer lo que queda como saber compartido del grupo, con su enunciado y sus condiciones. Es el paso que convierte la exploración en conocimiento disponible.

El cuarto paso es el que con más frecuencia se pierde. Una sesión de exploración sin institucionalización deja al estudiante con una experiencia agradable y sin saber qué debía quedarle. Cinco minutos de cierre explícito valen tanto como los treinta anteriores.

9.4 Errores de implementación más frecuentes

- Proyectar el laboratorio y explicarlo. Elimina la manipulación, que es la razón de ser del recurso.
- Omitir la predicción escrita. Sin compromiso previo no hay conflicto cognitivo.
- Resolver la conjetura del estudiante en cuanto duda. La duda es el estado en el que se aprende.
- Usar el laboratorio como premio al final de la unidad. Su lugar es la introducción del concepto, no la recompensa.
- Calificar la exploración. Convierte el ensayo en riesgo y suprime la conjetura arriesgada, que es la valiosa.
- Saltar la puesta en común por falta de tiempo. Es preferible explorar menos y discutir siempre.

10. Retos y limitaciones

Un documento de fundamentación que solo enumere fortalezas es propaganda. Este capítulo expone los retos abiertos del proyecto, agrupados por naturaleza, y las estrategias con que se abordan.

10.1 Retos técnicos

- **La restricción de archivo único limita la complejidad.** Prescindir de bibliotecas externas significa escribir desde cero funcionalidades que existen resueltas. Es un costo de desarrollo asumido a cambio de portabilidad y durabilidad.
- **Diversidad de dispositivos.** Las relaciones de aspecto extremas, las densidades de píxeles altas y los navegadores desactualizados producen fallos que solo aparecen en dispositivos reales. Mitigación: pruebas obligatorias en teléfono físico antes de publicar.
- **Rendimiento en gama baja.** Los recursos con gráficos tridimensionales exigen más de lo que algunos equipos escolares ofrecen. Mitigación: degradación elegante y una alternativa de menor exigencia cuando el contenido lo permite.
- **Accesibilidad plena aún no alcanzada.** La manipulación directa de objetos gráficos es difícil de hacer plenamente accesible a lectores de pantalla. Es una limitación reconocida y una línea de trabajo pendiente.
- **Versionado sin ruptura.** Cada nueva versión debe conservar la validez de las guías docentes ya distribuidas.

10.2 Retos didácticos

- **La ilusión de comprensión.** Un simulador fluido puede producir la sensación de haber entendido sin reorganización conceptual. Mitigación: ítems que no se resuelven por lectura visual y exigen inferencia adicional.
- **Dependencia de la orquestación docente.** El recurso rinde mucho con buena mediación y poco sin ella. Es una limitación intrínseca a todo material didáctico, no un defecto corregible por diseño.
- **Transferencia al papel.** Lo comprendido en pantalla no se transfiere automáticamente al examen escrito. Mitigación: los retos usan el formato de la evaluación escrita, y la guía exige registro en el cuaderno.
- **El equilibrio entre exploración y guía.** Demasiada libertad produce deriva; demasiada estructura convierte el laboratorio en receta. El punto óptimo varía por grado y sigue calibrándose.
- **Cobertura desigual del currículo.** El catálogo cubre los cinco pensamientos pero no todos los aprendizajes de cada grado. Es una colección de piezas, no un curso completo.

10.3 Retos de adopción

- **Confianza en un proyecto de autor.** Sin respaldo institucional, la adopción depende de la calidad percibida. Mitigación: autoría identificada con ORCID, licencia clara, fundamentación pública y difusión académica.
- **Formación docente.** La guía reduce la barrera pero no reemplaza la formación en orquestación instrumental.

- **Resistencia institucional al uso de dispositivos.** Muchas instituciones restringen el celular en clase. Mitigación: los modelos de implementación con dispositivos compartidos o proyector.
- **Descubribilidad.** Un recurso que nadie encuentra no existe. Mitigación: indexación, difusión en redes profesionales y publicación académica.
- **Sostenibilidad del esfuerzo.** El proyecto depende de una sola persona. Este es el riesgo más serio y el que motiva la decisión de licencia abierta: si el autor se detiene, cualquiera puede continuar.

10.4 Limitación de fondo: la ausencia de validación empírica

La limitación más importante del proyecto es que sus efectos sobre el aprendizaje no han sido medidos. Todo lo afirmado en este documento sobre el valor de los recursos es un argumento de diseño: se apoya en literatura consolidada y en principios explícitos, pero no en evidencia recogida sobre estudiantes usando estos laboratorios.

Esta distinción se sostiene deliberadamente a lo largo del documento y no debe difuminarse. Un diseño bien fundamentado hace probable un buen resultado; no lo garantiza. La agenda del capítulo siguiente existe para cerrar esa distancia.

11. Agenda de investigación y validación

11.1 Didaxis Lab como marco de validación

La contribución potencialmente más duradera del proyecto no son sus seis laboratorios sino el marco explícito con el que se construyen. Los artefactos digitales envejecen; los criterios de diseño, si están bien formulados y publicados, pueden ser usados, discutidos y aplicados por otros para evaluar sus propios recursos.

El marco de calidad, la taxonomía de interactividad y el protocolo de construcción de retos con distractores diagnósticos son piezas citables e independientes de los recursos concretos. Esta es la orientación estratégica del proyecto: producir un marco antes que producir volumen.

11.2 Relación con la investigación doctoral del autor

El proyecto se desarrolla en paralelo a una investigación doctoral en educación matemática sobre argumentación mediada por tecnología en el estudio de funciones racionales en educación media. Ambos trabajos comparten el andamiaje teórico —Toulmin para la estructura del argumento, Yackel y Cobb para las normas sociomatemáticas, Duval para los registros y la génesis instrumental para la mediación— y se alimentan mutuamente.

La relación se mantiene explícita pero delimitada: Didaxis Lab no es el objeto de la tesis ni la tesis es la validación del proyecto. Los recursos pueden actuar como uno más de los mediadores disponibles en el aula estudiada, sin que el diseño de la investigación se convierta en investigación basada en diseño. Mantener esa frontera es una decisión metodológica deliberada.

11.3 Líneas de validación pendientes

Línea	Pregunta	Diseño posible
Validez de contenido	¿Los expertos coinciden en que los ítems miden lo que declaran medir?	Juicio de expertos con índice de acuerdo sobre el banco de retos.
Poder diagnóstico de los distractores	¿La distribución de errores identifica efectivamente concepciones alternativas?	Análisis de respuestas en muestras amplias y entrevistas de seguimiento.
Usabilidad	¿La interfaz introduce carga ajena?	Observación de uso con protocolo de pensamiento en voz alta.
Efecto sobre la comprensión	¿Hay diferencia frente a una secuencia equivalente sin laboratorio?	Diseño cuasiexperimental con pretest y posttest y grupos comparables.
Efecto sobre la argumentación	¿Cambia la estructura de los argumentos producidos?	Análisis con el modelo de Toulmin sobre episodios argumentativos transcritos.
Adopción docente	¿Qué facilita o impide el uso sostenido?	Estudio de casos múltiples con docentes usuarios.

Tabla 13. Agenda de validación empírica.

11.4 Difusión

La difusión del proyecto se orienta en tres direcciones simultáneas: publicación académica de los marcos y de los resultados de validación en revistas de educación matemática y tecnología educativa; divulgación profesional dirigida a docentes en ejercicio, que es el público que puede usar los recursos mañana; y postulación a convocatorias de innovación educativa que otorgan visibilidad y validación externa a experiencias de este tipo.

12. Hoja de ruta

Las prioridades del proyecto para el periodo siguiente, ordenadas por horizonte. La lista es una declaración de intención, no un compromiso contractual: es un proyecto de autor sostenido con recursos propios.

Horizonte	Prioridades
Inmediato	Publicación de los tres juegos; guías docentes de los juegos; revisión de accesibilidad del catálogo completo; publicación del marco de calidad como documento citable.
Corto plazo	Nuevos laboratorios en los aprendizajes menos cubiertos, con prioridad en el pensamiento variacional de la media; laboratorio de función racional acotado al estudio de dominio, discontinuidades, asíntotas y comportamiento al infinito.
Mediano plazo	Primera validación empírica —validez de contenido y usabilidad—; paquete descargable del catálogo completo para instalación local en instituciones sin conectividad; versión imprimible de las guías para distribución en papel.
Largo plazo	Estudio de efecto sobre la argumentación; apertura del marco a colaboración externa; adaptación de los recursos a otros currículos hispanohablantes.

Tabla 14. Hoja de ruta por horizonte.

Cierre

Didaxis Lab parte de una apuesta que puede enunciarse en una línea: la matemática escolar mejora cuando el estudiante puede tocarla, romperla y comprobar por sí mismo qué resiste. Todo lo demás — la arquitectura offline, la alineación curricular, el diseño de los distractores, la guía docente— es infraestructura al servicio de esa apuesta. El proyecto se publica abierto y documentado precisamente para que la apuesta pueda ser puesta a prueba por otros.

Anexo A. Ficha técnica del catálogo

Recurso	Tipo	Pensamiento	Grados	Fenómeno central
Fracciones Vivas	Laboratorio	Numérico	3.º-7.º	Una fracción, cuatro representaciones sincronizadas
Área vs Perímetro	Laboratorio	Métrico-espacial	3.º-11.º	Perímetro fijo, área variable
Pitágoras Interactivo	Laboratorio	Métrico-espacial	7.º-11.º	Equivalencia de áreas y ruptura de la hipótesis
Función Cuadrática	Laboratorio	Variacional	9.º-11.º	Efecto aislado de cada parámetro sobre la curva
Círculo Unitario y Ondas	Laboratorio	Variacional/trigonométrico	10.º-11.º	Del giro a la onda
Azar y Probabilidad	Laboratorio	Aleatorio	6.º-10.º	Convergencia de la frecuencia a la probabilidad
Guardianes del Cero	Juego	Numérico	6.º-8.º	Neutralización y ley de los signos
Guardianes del Claro	Juego	Variacional	9.º-11.º	Evaluar una función para decidir
Misión Número Secreto	Juego	Numérico/lógico	4.º-9.º	Deducción por descarte y suficiencia de información

Tabla A1. Catálogo completo a agosto de 2026.

Anexo B. Plantilla de guía docente

Estructura que debe cumplir toda guía antes de publicarse. Puede usarse también como plantilla para adaptar un recurso a un contexto institucional propio.

- 1.** Identificación: recurso, grados, pensamiento, DBA, estándar, competencias evaluadas y tiempo estimado.
- 2.** Objetivo de aprendizaje redactado en términos observables.
- 3.** Conocimientos previos y comprobación rápida.
- 4.** Momento 1 — Anticipación: pregunta orientadora y consigna de predicción escrita.
- 5.** Momento 2 — Exploración: consignas de manipulación y formato de registro de observaciones.
- 6.** Momento 3 — Formalización: puesta en común, institucionalización y resolución de retos.
- 7.** Preguntas de orquestación con indicación de cuándo intervenir y cuándo no.
- 8.** Errores frecuentes con su lectura diagnóstica y tratamiento sugerido.
- 9.** Criterios de aceptabilidad de una justificación, diferenciados por grado.
- 10.** Variantes de implementación según infraestructura disponible.
- 11.** Evaluación, uso de la traza y tareas de extensión.

Anexo C. Cómo citar y reutilizar

C.1 Citar un recurso

Banquez Buendía, H. E. (2026). [Nombre del laboratorio] [Simulador interactivo]. Didaxis Lab. <https://www.didaxislab.com>

C.2 Citar el proyecto

Banquez Buendía, H. E. (2026). Didaxis Lab: laboratorios interactivos de matemáticas [Recurso educativo abierto]. <https://www.didaxislab.com>

C.3 Condiciones de reutilización

La licencia CC BY 4.0 permite copiar y redistribuir el material en cualquier medio y formato, y adaptarlo, transformarlo y construir sobre él para cualquier finalidad, incluso comercial. La única condición es dar el crédito apropiado, indicar si se realizaron cambios y enlazar a la licencia. No pueden aplicarse restricciones legales o tecnológicas adicionales que impidan a otros hacer cualquier uso permitido por la licencia.

C.4 Usos especialmente bienvenidos

- Incorporación de los recursos al plan de área de una institución.
- Traducción o adaptación curricular a otro país hispanohablante.
- Uso en programas de formación docente inicial o continua.
- Investigación empírica sobre su efecto, incluidos resultados desfavorables.
- Redistribución local en instituciones sin conectividad.

Anexo D. Glosario

Término	Definición operativa en este documento
Argumentación matemática	Producción y evaluación de razones que sostienen una afirmación matemática. Se analiza con las categorías de dato, conclusión, garantía y respaldo.
Carga cognitiva ajena	Demanda sobre la memoria de trabajo generada por el diseño del material y no por el contenido a aprender.
Contraejemplo	Caso particular que refuta una afirmación general. Un solo contraejemplo basta para refutar.
DBA	Derechos Básicos de Aprendizaje. Enunciados por grado de los aprendizajes estructurantes, publicados por el MEN en su versión 2 en 2016.
Distractor diagnóstico	Opción incorrecta de un ítem construida a partir de una concepción alternativa documentada.
Garantía	En el modelo de Toulmin, la regla que autoriza el paso del dato a la conclusión. Su explicitación es el objetivo argumentativo central del proyecto.
Génesis instrumental	Proceso por el cual un artefacto se convierte en instrumento para un sujeto mediante el desarrollo de esquemas de uso.
Institucionalización	Acción docente por la que un resultado explorado se establece como saber compartido del grupo.
Norma sociomatemática	Criterio negociado en el aula sobre qué cuenta como explicación, justificación o solución aceptable.
Offline	En este documento: capacidad del recurso de funcionar íntegramente sin conexión a la red una vez cargado en el dispositivo.
Orquestación instrumental	Conjunto de decisiones del docente sobre cómo organizar el entorno y la interacción alrededor de una herramienta digital.
Registro de representación	Sistema semiótico en el que se representa un objeto matemático: verbal, gráfico, tabular, algebraico o figural.
Trazabilidad	Registro local y exportable de las decisiones del estudiante, generado sin envío de datos a servidor alguno.
Vigilancia epistémica matemática	Disposición a verificar la validez de una afirmación o procedimiento antes de aceptarlo, incluidas las producidas por sistemas automáticos.

Referencias

Se listan las obras que fundamentan las decisiones de diseño expuestas y las fuentes de los datos de contexto citados.

- Black, P. y Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 5(1), 7-74.
- Deci, E. L. y Ryan, R. M. (2000). The «what» and «why» of goal pursuits: human needs and the self-determination of behavior. *Psychological Inquiry*, 11(4), 227-268.
- Departamento Administrativo Nacional de Estadística (2026). Encuesta Nacional de Calidad de Vida 2025: indicadores básicos de tenencia y uso de tecnologías de la información y las comunicaciones. DANE.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213-234.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Hattie, J. y Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81-112.
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (2024). Marco de referencia de la prueba de Matemáticas. Saber 11.º. ICFES.
- Kirschner, P. A., Sweller, J. y Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work. *Educational Psychologist*, 41(2), 75-86.
- Laboratorio de Economía de la Educación (2026). Análisis de resultados Saber 11 2025. Pontificia Universidad Javeriana.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares: Matemáticas. MEN.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. MEN.
- Ministerio de Educación Nacional (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje: Matemáticas (v. 2). MEN.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. NCTM.
- OCDE (2023). PISA 2022 Assessment and Analytical Framework. OECD Publishing.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Sweller, J., Ayres, P. y Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory*. Springer.
- Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (ed. actualizada). Cambridge University Press. (Obra original publicada en 1958).
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.